

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
3.	Направленность (профили)	Математика. Физика
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.О.03.03 Геометрия
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2022

I. Методические рекомендации

1.1 Методические рекомендации по организации работы студентов во время проведения лекционных занятий

- В ходе лекций преподаватель излагает и разъясняет основные, наиболее сложные понятия темы, а также связанные с ней теоретические и практические проблемы, дает рекомендации для практического занятия и указания для выполнения самостоятельной работы.
- В ходе лекционных занятий обучающемуся необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание изучаемой дисциплины, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве.
- Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Рекомендуется активно задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

1.2 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

- На практическом занятии студенты решают задачи под руководством преподавателя. Семинар проводится по узловым и наиболее сложным вопросам (темам, разделам) учебной программы.
- Практические занятия посвящены изучению наиболее важных тем учебной дисциплины. Они служат для закрепления изученного материала, развития умений и навыков подготовки докладов, сообщений, приобретения опыта устных публичных выступлений, ведения дискуссии, аргументации и защиты выдвигаемых положений, а также для контроля преподавателем степени подготовленности студентов по изучаемой дисциплине.
- В ходе подготовки к практическим занятиям следует изучить основную и дополнительную литературу, учесть рекомендации преподавателя и требования рабочей программы.
- Можно подготовить свой конспект ответов по рассматриваемой тематике, подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на занятие. Следует продумать примеры с целью обеспечения тесной связи изучаемой теории с реальной практикой. Можно дополнить список рекомендованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы.

1.3 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

- Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).
- Самостоятельная работа студентов (далее – СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. СРС играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

- К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом СРС играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.
- В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.
- Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:
 - изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
 - подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
 - участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.
- Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.
- Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях.

Чтение учебника

- Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, производя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и выполняя имеющиеся в учебнике чертежи.
- Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.
- Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательств сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.
- При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. д. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.
- Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.
- Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Самопроверка

- После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, даны с целью помочь студенту в повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, решить ряд задач.
- Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

1.4 Проведение занятий в интерактивной форме

- Интерактивное обучение представляет собой способ познания, осуществляемый в формах совместной деятельности обучающихся, т.е. все участники образовательного процесса взаимодействуют друг с другом, совместно решают поставленные проблемы, моделируют ситуации, обмениваются

информацией, оценивают действие коллег и свое собственное поведение, погружаются в реальную атмосферу делового сотрудничества по разрешению проблем.

- Интерактивная форма обучения реализуется в виде коллективных решений творческих задач.
- Коллективные решения творческих задач. Под творческими заданиями понимаются такие учебные задания, которые требуют от обучающихся не простого воспроизводства информации, а творчества, поскольку задания содержат больший или меньший элемент неизвестности и имеют несколько подходов, несколько методов решения.

1.5 Методические рекомендации по решению задач, в том числе дополнительных

- Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал.
- При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать из них самый лучший. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.
- Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.
- Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения.
- В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т. п.
- Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно, прежде всего, проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.
- Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.
- Перед решением задачи должно быть полностью приведено ее условие. Само решение следует сопровождать необходимыми расчетами и пояснениями с указанием применяемых формул, анализом и выводами.
- Работа должна быть оформлена аккуратно, написана разборчиво без помарок, зачеркиваний и сокращений слов.

1.6 Методические указания по подготовке к решению кейсов – практических ситуаций

- Кейс (в переводе с англ. – случай) представляет собой проблемную ситуацию, предлагаемую студентам в качестве задачи для анализа и поиска решения. Обычно кейс содержит схематическое словесное описание ситуации, статистические данные, а также мнения и суждения о ситуациях, которые трудно предсказать или измерить. Кейс, охватывает такие виды речевой деятельности как чтение, говорение и письмо.
- Кейсы наглядно демонстрируют, как на практике применяется теоретический материал. Данный материал необходим для обсуждения предлагаемых тем, направленных на развитие навыков общения и повышения профессиональной компетенции. Зачастую в кейсах нет ясного решения проблемы и достаточного количества информации.
- Анализ кейса должен осуществляться в определенной последовательности:
 - Выделение проблемы.
 - Поиск фактов по данной проблеме.
 - Рассмотрение альтернативных решений.
 - Выбор обоснованного решения.

1.7 Методические рекомендации по выполнению домашних и индивидуальных заданий

- Домашние задания по курсу выполняются обучающимися самостоятельно в отдельной тетради или в тетради для практических занятий.
- Домашние задания ориентированы на закрепление теоретического материала, изученного в ходе лекционного занятия и отработанного на практических занятиях по каждой теме курса.
- При выполнении домашнего задания обучающийся должен повторить теоретический материал лекции по данной теме; разобрать задания, выполненные на практическом занятии; записать условие задания в тетрадь; полно и с обоснованием действий выполнить решение заданий; при необходимости привести необходимые уточнения (формулы, теоремы, утверждения), на основе которых проводилось решение; записать ответ или вывод.

- Все индивидуальные задания необходимо защитить в устной форме, ответив на вопросы преподавателя по выполнению заданий и обоснованию приведенного решения.

1.8 Методические рекомендации по подготовке к сдаче коллоквиума

- Коллоквиум проводится по теоретической части курса и состоит из нескольких этапов.
- 1 Этап. Устный опрос по определениям.
- Все определения необходимо знать наизусть. Каждое верно сформулированное определение – 1 балл. Необходимо набрать максимум – 3 балла, минимум – 2 балла.
- Если обучающийся не справился с данным этапом, то продолжает осваивать учебную дисциплину самостоятельно до следующей попытки.
- Баллы (2 или 3), полученные за первый этап, могут сохраняться до следующей пересдачи коллоквиума.
- 2 Этап. Устный вопрос с развернутым ответом.
- При подготовке к ответу на вопрос (в течение 20 минут) считается допустимым использование собственноручно написанного конспекта, записей. Использование иных материалов и технических средств является нарушением правил и достаточным условием для того, чтобы коллоквиум считать не сданным и обучающийся продолжает осваивать дисциплину самостоятельно до следующей попытки.
- Во время ответа преподавателю обучающийся может вести какие-либо записи на чистом листе бумаги.
- Максимальное количество баллов за ответ на вопрос обучающийся получает, если даны все определения, сформулированы и доказаны утверждения, приведены примеры и контрпримеры, и минимальное – если даны все определения, сформулированы утверждения, доказательства приведены, но только на уровне идеи.

1.9 Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

- Контрольные работы по данной дисциплине выполняются в отдельных тетрадях для контрольных работ или на отдельных листах, которых хранятся у преподавателя; в них же обучающийся выполняет работу над допущенными ошибками в случае неудовлетворительного выполнения контрольной работы или дополнительное задание для допуска к пересдаче контрольной работы.
- Контрольная работа считается зачтенной, если правильно выполнено не менее 60% заданий.
- Задания контрольной работы выполняются аккуратно, последовательно, обоснование решения и ответ обязательны в каждом задании.
- При написании работы можно использовать черновик.
- При выполнении контрольных работ не допускается использование мобильных устройств, гаджетов, калькуляторов, учебной литературы.

1.10 Методические рекомендации по выполнению теста, в том числе итогового

- Итоговый тест проводится в виде компьютерного тестирования.
- Для успешного прохождения итогового теста обучающиеся в режиме самоподготовки выполняют задания подготовительных тестов.
- Сложные задания, встречаемые в тестах, студенты могут выполнять на групповых и индивидуальных консультациях по предмету.
- Перед прохождением теста обучающийся должен повторить весь теоретический и практический материал курса, выучить основные формулы, определения, утверждения и теоремы, знать способы и методы решения ключевых заданий курса.

1.11 Методические рекомендации по подготовке к сдаче зачета

- Зачет осуществляется в рамках завершения изучения дисциплины и позволяет определить качество усвоения изученного материала, а также степень сформированности компетенций.
- Студенты обязаны сдавать зачет в строгом соответствии с утвержденными учебными планами, разработанными согласно образовательным стандартам высшего образования.
- По данной дисциплине зачет принимается по практической части курса. Задания, предлагаемые на зачете, соответствуют оценочным средствам для промежуточной аттестации обучающихся по предмету.
- Студент обязан не только представить правильно выполненные задания, но и защитить свое решение.
- Преподавателю предоставляется право задавать студентам вопросы по решению заданий практической части с целью выявления глубины понимания изученного материала и степени самостоятельности выполнения заданий.
- При явке на зачет студенты обязаны иметь при себе зачетную книжку, которую они предъявляют преподавателю в начале зачета.
- Рекомендуются при подготовке к зачету опираться на следующий план:

1. Повторить теоретическую часть курса.
2. После работы над теорией необходимо ответить на вопросы для самоконтроля.
3. Повторить методы, способы и приемы решения задач по всем темам курса, опираясь на задания, которые решались на практических занятиях и предлагались для самостоятельной работы.
4. Решить типовые задания по данной теме.

1.12 Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзамена

- Экзамен осуществляется в рамках завершения изучения дисциплины (модуля) и позволяет определить качество усвоения изученного материала, а также степень сформированности компетенций.
- Студенты обязаны сдавать экзамен в строгом соответствии с утвержденными учебными планами, разработанными согласно образовательным стандартам высшего образования.
- По данной дисциплине экзамен принимается по билетам, содержащим два вопроса. Экзаменационные билеты утверждаются на заседании кафедры.
- Экзаменатору предоставляется право задавать студентам вопросы в рамках билета, а также, помимо теоретических вопросов, предлагать задачи практико-ориентированной направленности по программе данного курса.
- При явке на экзамен студенты обязаны иметь при себе зачетную книжку, которую они предъявляют экзаменатору в начале экзамена.
- Рекомендуется при подготовке к экзамену опираться на следующий план:
 - a. Просмотреть программу курса, с целью выявления наиболее проблемных тем, вопросов, которые могут вызвать трудности при подготовке к экзамену.
 - b. Темы необходимо изучать последовательно, внимательно обращая внимание на описание вопросов, которые раскрывают ее содержание. Начинать необходимо с первой темы.
 - c. После работы над первой темой необходимо ответить на вопросы для самоконтроля и решить задания к ней. При этом для эффективного закрепления информации решить задания первый раз лучше без использования учебных материалов, второй раз с их использованием.

II. Планы практических занятий

Тема 1. Элементы векторной алгебры в евклидовом пространстве

План

1. Направление на прямой, в плоскости и в пространстве.
2. Равные направленные отрезки
3. Определение вектора.
4. Линейная зависимость векторов.
5. Базис системы векторов.
6. Координаты вектора.
7. Ортонормированный базис множества векторов пространства
8. Скалярное произведение двух векторов пространства.
9. Ориентация плоскости. Векторное произведение двух векторов
10. Смешанное произведение трех векторов
11. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии.

Литература: [1, с. 5-19, 54-67]; [2, с. 141-165]; [4, с. 17-44]; [6, с. 9-30, 42-53].

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение понятия вектора.
2. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными?
3. Основные операции над векторами.
4. Что называют проекцией вектора на заданную ось? Свойство проекций.
5. Дайте определение декартовой прямоугольной системы координат. Векторы в декартовой системе координат.
6. Какие векторы называются линейно зависимыми и независимыми?
7. Дайте определение понятию «линейное пространство». Приведите примеры линейных пространств
8. Интерпретируйте (напр. графически) понятия базиса на прямой, плоскости и в пространстве. Что такое координаты вектора. Какой базис называется декартовым?
9. Как осуществляются линейные операции над векторами в координатной форме? Как определяются координаты и длина вектора, заданного координатами начальной и конечной точек; расстояние между двумя точками?
10. Интерпретируйте понятия «орт вектора»; «направляющие косинусы вектора». Чему равна проекция вектора на ось?

11. Запишите операции сложения и умножения вектора на число в координатной форме.
12. Дайте определение скалярного произведения двух векторов.
13. Перечислите свойства скалярного произведения.
14. Запишите координатную форму записи скалярного произведения.
15. Дайте определение векторного произведения двух векторов.
16. Перечислите свойства векторного произведения двух векторов.
17. Запишите координатную форму записи векторного произведения.
18. Дайте определение смешанного произведения, перечислите его свойства.
19. Дайте понятие двойного векторного произведения трех векторов.
20. В решении каких задач используется векторное произведение?
21. Назовите геометрический, физический и механический смысл векторного произведения.
22. Интерпретируйте (напр. графически) смешанное произведение как скалярно-векторное.
23. Как выражается смешанное произведение в координатной форме?
24. В решении каких задач используется смешанное произведение?
25. Назовите геометрический смысл смешанного произведения.
26. Запишите в векторной и координатной формах условие компланарности векторов.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \pi/3$.
2. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.
3. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.
4. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$,
если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \frac{\pi}{3}$.

Тема 2: Аналитическая геометрия на плоскости

План

1. Аффинная система координат пространства.
2. Декартова система координат.
3. Метод координат на плоскости.
4. Формулы перехода от одной аффинной системы координат к другой.
5. Система координат плоскости.
6. Примеры других систем координат на плоскости и в пространстве.
7. Метод координат решения задач.
8. Расположение прямой относительно осей координат, и начала координат.
9. Взаимное расположение двух прямых.
10. Метрические задачи. Пучок прямых.
11. Кривые второго порядка. Алгебраические кривые.
12. Эллипс. Гипербола. Парабола.
13. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.
14. Классификация кривых второго порядка.

Литература: [1, с. 19-28, 31-42]; [2, с. 9-24, 44-73]; [3, с. 44-53, 68-92]; [6, с. 78-103].

Вопросы для самоконтроля:

1. Преобразование декартовых координат в пространстве.
2. Формулы преобразований для координат.
3. Свойства движения плоскости.
4. Свойства преобразования подобия.
5. Свойства преобразования гомотетии.
6. Проективные реперы.
7. Трехвершинник и его свойства.
8. Преобразования координат в проективном пространстве.
9. Понятие о четырехвершиннике.
10. Сложное отношение четырех точек
11. Построение с помощью циркуля и линейки.
12. Сложности пятого постулата Евклида.
13. Каковы канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы?
14. Что называют фокусами, директрисами и эксцентриситетом эллипса, гиперболы и параболы?
15. Каковы геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы?

16. Что называют асимптотами гиперболы?
17. Приведите примеры уравнений линий в полярных координатах.
18. Какие геометрические объекты на плоскости может определять алгебраическое уравнение второго порядка относительно x и y ?
19. Приведите пример алгебраического уравнения второго порядка, множество решений которого представляет собой пару перпендикулярных прямых.
20. Могут ли фокусы гиперболы совпадать?
21. Чем директриса отличается от биссектрисы?
22. У каких кривых второго порядка есть оси (центр) симметрии?

Задания для самостоятельной работы:

1. Даны две смежные стороны квадрата $C(2; -3)$ и $D(-4; 5)$. Найти площадь этого квадрата.
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.
3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.
4. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C .
5. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.
6. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.
7. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
8. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.
9. Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определить тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Тема 3: Аналитическая геометрия в пространстве

План

1. Плоскость и прямая в пространстве.
2. Уравнения плоскости.
3. Расположение плоскости относительно осей координат, координатных плоскостей и начала координат.
4. Взаимное расположение двух и трех плоскостей.
5. Полупространство. Метрические задачи.
6. Пучок и связка плоскостей.
7. Уравнения прямой в пространстве.
8. Взаимное расположение прямых в пространстве. Метрические задачи о прямых.
9. Взаимное расположение прямой и плоскости.
10. Поверхности второго порядка. Алгебраические поверхности.
11. Поверхности вращения.
12. Метод сечения исследования поверхностей.
13. Эллипсоид. Гиперboloиды. Параболоиды.
14. Цилиндрические и конические поверхности.
15. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.
16. Конические сечения.

Литература: [1, с. 24-31, 67-76, 83-100]; [2, с. 25-44, 166-214]; [3, с. 54-68]; [4, с. 46-70]; [6, с. 57-120].

Вопросы для самоконтроля:

1. Как определяются в аналитической геометрии линии, поверхности и другие множества точек? Приведите примеры.
2. Как можно найти точку пересечения двух линий на плоскости, трех поверхностей, линии и поверхности? Приведите примеры.
3. Что называют порядком алгебраической линии и алгебраической поверхности? Приведите примеры.
4. Как записываются параметрические уравнения прямой?
5. Что называют угловым коэффициентом прямой на плоскости и каков его геометрический смысл в декартовой прямоугольной системе координат?
6. Как записываются уравнения прямой, проходящей через две точки, на плоскости?

7. Как вычисляются углы между двумя прямыми?
8. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости?
9. Что называют направляющим вектором прямой и направляющими векторами плоскости?
10. Как записываются параметрические уравнения плоскости?
11. Как записываются уравнения прямой, проходящей через две точки, в пространстве?
12. Как записывается уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки?
13. Как вычисляются углы между двумя плоскостями, между плоскостью и прямой?
14. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве, двух плоскостей, прямой и плоскости?
15. Назовите поверхности второго порядка и напишите их канонические уравнения.
16. Что такое цилиндр?
17. Чем характерно уравнение цилиндра с образующей параллельной координатной оси?
18. На какую особенность расположения поверхности относительно системы координат указывает отсутствие в уравнении свободного члена?
19. Какие виды гиперboloидов Вы знаете?
20. Какие виды параболоидов вы знаете?

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4; -3; 12)$ – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.
2. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки $P(2; 0; -1)$ и $Q(1; -1; 3)$ перпендикулярно плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$.
3. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.
4. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$.
5. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.
6. Какую поверхность определяет уравнение $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 8y + 18z - 54 = 0$?
7. Исследовать и построить поверхность, заданную уравнением $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = -2z$.
8. Какую поверхность определяет уравнение $16y^2 - 9z^2 + 32y + 54z - 209 = 0$?
9. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и направляющей

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$
10. Составить уравнение сферы, радиус которой 7, а центр находится в точке $C(-4, 3, -5)$.

Пример кейс-задания для коллективного решения:

Задача. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 3)$, $A_3(2; 1; 1)$, $A_4(1; 2; 5)$.

- I подзадача. Найти длину ребра A_1A_2 .
- II подзадача. Найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 .
- III подзадача. Найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.
- IV подзадача. Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.
- V подзадача. Найти объем пирамиды.
- VI подзадача. Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Тема 4. Преобразования плоскости

План

1. Группа движений. Теорема единственности.
2. Движения первого и второго родов.
3. Классификация движений по числу неподвижных точек.
4. Подгруппы группы движений.
5. Равномерно разрывные группы движений.
6. Группа преобразований подобия.
7. Теорема единственности.
8. Преобразования подобия первого и второго родов.
9. Гомотетия и ее свойства.
10. Группа аффинных преобразований плоскости.
11. Аффинные преобразования первого и второго родов.
12. Аффинные преобразования в координатах.

13. Классификация аффинных преобразований по числу неподвижных точек.
14. Родственные преобразования.
15. Подгруппы группы аффинных преобразований.

Литература: [1, с. 42-53]; [2, с. 74-86]; [7, с. 53-57].

Вопросы для самоконтроля:

1. Свойства движения плоскости.
2. Свойства преобразования подобия.
3. Свойства преобразования гомотетии.
4. Преобразования координат в проективном пространстве.
5. Понятие о четырехвершиннике.
6. Сложное отношение четырех точек
7. Построение с помощью циркуля и линейки.
8. Угол между векторами на ориентированной плоскости.
9. Преобразование прямоугольных систем координат.

Задания для самостоятельной работы:

1. Является ли A линейным преобразованием. $A \bar{x} = \bar{x} + \bar{x}_0$; $\bar{x}_0 \neq 0$.
2. Найти матрицу линейного преобразования, заданного в виде:

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= y + z \\ z' &= z + x \end{aligned}$$

3. Задано линейное преобразование A , переводящее вектор \bar{x} в вектор \bar{y} и линейное преобразование B , переводящее вектор \bar{y} в вектор \bar{z} . Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор \bar{x} в вектор \bar{z} .

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \end{cases}$$

Тема 5. Преобразования пространства

План

1. Группа аффинных преобразований пространства.
2. Аффинные преобразования первого и второго родов.
3. Аффинные преобразования в координатах.
4. Группа движений пространства.
5. Движения первого и второго родов.
6. Движение в координатах.
7. Группа преобразований подобия пространства.

Литература: [1, с. 76-83]; [2, с. 131-140].

Вопросы для самоконтроля:

1. Преобразование декартовых координат в пространстве.
2. Формулы преобразований для координат.
3. Какое преобразование пространства называется поворотом пространства вокруг прямой?
4. В какую фигуру переходит прямая (плоскость) при повороте пространства вокруг прямой? Обоснуйте свой ответ.
5. Что можно сказать о взаимном расположении прямой и ее образа при повороте пространства вокруг данной прямой? Ответ обосновать.
6. Что может служить образом середины отрезка при повороте пространства вокруг прямой?
7. В какую фигуру при повороте пространства вокруг прямой преобразуется отрезок; луч; полуплоскость? Ответ обоснуйте.
8. Имеет ли поворот пространства вокруг прямой инвариантные прямые; инвариантные плоскости?

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A , матрица

$$\text{линейного преобразования } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A , матрица

$$\text{линейного преобразования } A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тема 6. Аффинное и евклидово n -мерные пространства

План

1. Система аксиом Вейля n -мерного аффинного пространства.
2. k -плоскость. Свойства k -плоскостей.
3. Аффинная система координат n -мерного аффинного пространства, простейшие задачи.
4. Уравнения k -плоскости.
5. Группа аффинных преобразований n -мерного аффинного пространства.
6. Евклидово n -мерное пространство.
7. Связь аксиом школьного курса геометрии и системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства.

Литература: [1, с. 100-109].

Вопросы для самоконтроля:

1. Векторное n -мерное пространство.
2. Линейные и билинейные формы. Положительно определенные билинейные формы.
3. Евклидово векторное n -мерное пространство.
4. Аффинное n -мерное пространство.
5. k -мерные плоскости. Различные способы задания.
6. Гиперплоскости и прямые пространства A^n . Фигуры в A^n .
7. Преобразование аффинного n -мерного пространства. Группа аффинных преобразований.
8. Евклидово n -мерное пространство.

Задания для самостоятельной работы:

1. Пусть в 4 -х мерном пространстве E^4 дана 3 -плоскость $\pi_3 = (A, W^3)$, $A(1, -1, 0, 2)$, подпространство W^3 пространства переносов задано своим базисом: $\bar{m}_1(1, -1, 2, 0)$, $\bar{m}_2(0, 1, 0, 1)$, $\bar{m}_3(0, 0, 1, 1)$. Написать параметрические уравнения π_3 .
2. Доказать, что точки A, B, C принадлежат одной прямой: $A(2, 1, -2, 0)$, $B(1, -3, -3, 1)$, $C(4, 9, 0, -2)$.
3. Даны две точки $A(1, 3, -1, 2)$ и $B(-1, -2, 1, 3)$. Найти координаты точек пересечения прямой AB с координатными гиперплоскостями.